

# Moure's pel laberint de la natura

La concepció geomètrica de la natura s'havia basat tradicionalment en estructures homogènies fins que, fa uns trenta anys, va aparèixer la teoria dels fractals, que ens ofería una nova manera de concebre les formes espacials del nostre entorn. Aquest tema de divulgació ha guanyat el Premi de Comunicació Científica Joan Lluís Vives en la modalitat de ciència. L'autor explica d'una manera entenedora el projecte de tesi 'Fronts de reacció i difusió en extincions biològiques i incendis forestals per a medis heterogenis'.

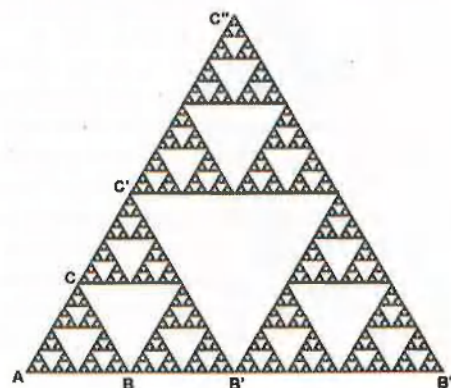
**P**ierre-Gille de Gennes, premi Nobel de Física del 1991, va ser qui va encunyar, al final dels anys setanta, l'expressió "*the ant in the labyrinth*" ("la formiga a dins del laberint"). Amb aquesta frase volia il·lustrar el problema físic d'una partícula movent-se a través d'una estructura plena d'obstacles de manera completament desorganitzada i a l'atzar, tal com podem esperar que ho farien un grup de formigues en deixar-les anar enmig d'un laberint (tot i que també és possible que De Gennes estigués subestimant la intel·ligència i el sentit de l'orientació de les formigues).

Tots els fenòmens de transport que, com en la imatge proposada per De Gennes, es basen en el moviment més o menys aleatori dels individus, s'anomenen, en física, fenòmens de difusió. No cal anar gaire lluny per trobar una infinitat d'exemples a la natura en què els fenòmens de difusió tenen un paper important: les molècules d'un cert contaminant es "difonen" en ser abocades en un riu, els virus o bacteris es "difonen" a través dels nostres teixits quan penetren a l'organisme, les emissions gasoses es "difonen" a través de l'aire, els animals d'una

certa espècie es "difonen" a través del seu hàbitat...

La difusió va començar a ser estudiada en profunditat pels físics i matemàtics ja fa més de cent anys. El que aquests primers científics feien era considerar la situació més senzilla, en la qual no existeixen les parets del laberint, de manera que les formigues es mouen a través d'un pla homogeni sense trobar-hi obstacles. Amb aquesta simplificació, aviat van ser capaços de respondre les qüestions principals que es poden plantejar, com ara: "Quina es la probabilitat que una formiga s'hagi desplaçat una distància determinada al cap d'un cert temps?" o "quin és el temps mitjà que una formiga necessita per recórrer una certa distància?".

Durant molt de temps, doncs, l'estudi va quedar reduït al cas "sense obstacles" i a altres variants sempre basades en una geometria homogènia. Però aquesta situació va donar un gir radical amb l'aparició dels fractals com a nova eina matemàtica. Els fractals són estructures geomètriques aparentment complicades però que aconsegueixen una propietat molt especial anomenada autosimilitud; això, estructures que,



EL TEMPS

vistes a diferents escales, tenen el mateix aspecte —per tant, les mateixes propietats—.

A la figura de dalt es mostren dos exemples d'estructures fractals. En el cas de l'esquerra és especialment senzill veure la idea d'autosimilitud: el triangle ABC és idèntic al AB'C' (i al AB''C''), però a escales diferents. Pel contrari, en el cas de la dreta l'autosimilitud no és apreciable a simple vista, però si s'estudien (mitjançant, per exemple, un ordinador) les propietats de l'estructura es troba també el mateix comportament a diferents escales. En aquest cas parlem d'un fractal estadístic.

Observant els dos dibuixos i la varietat de formes que presenten, ens adonem que si fóssim capaços d'explicar un procés de difusió a través d'estructures com aquestes estaríem molt més a prop de donar solució al dilema de "la formiga dins del laberint".

És, fins i tot, temptador deixar-se portar per l'encant visual del problema, portant-lo més enllà del marc purament formal o cien-



La natura ofereix diverses formes de fractals, és a dir, estructures geomètriques aparentment complicades que acompleixen una propietat molt especial coneguda com autosimilitud. En el dibuix de l'esquerra, a sota, és veu clar que el triangle ABC és igual que l'AB<sup>2</sup>C<sup>2</sup> per a aquestes diferents. Encara que en les altres imatges –el dibuix, la muntanya o la flor– això no es veu a simple vista, la mateixa estructura també es repeteix a diferents escales.



tífic. Donant-li un caire més filosòfic, el problema convida a crear tota mena d'especulacions i imatges, algunes de les quals són ben atractives. Podem, per exemple, imaginar que en comptes de formigues, ara som nosaltres mateixos qui ens movem cegament a través d'aquest laberint fractal. Avancem, ens movem a un costat i l'altre sense saber ben bé cap a on anem, i contínuament hem de superar obstacles que sorgeixen davant nostre. I cada vegada els obstacles que ens trobem són majors i costen més de vorejar... De vegades, ar-

ribem a un punt que és idèntic a un altre pel qual ja vam passar fa temps i que hem de tornar a creuar; altres vegades, arribem a un camí sense sortida i l'única manera d'avançar és desfer el camí i provar una altra via... Crec que seria difícil trobar en tota la ciència una metàfora de la vida tan escaient.

**La ubiqüitat dels fractals.** Fins a aquest moment ha quedat descrit el problema que es vol plantejar, però encara no s'ha parlat de les motivacions que ens hi porten.

L'estudi de la difusió en fractals és útil per saber com es difon un contaminant abocat a la xarxa fluvial o amb quina velocitat es propaga un incendi segons quina sigui la distribució dels arbres

En aquest sentit, la qüestió principal que ens podem fer és: "Què tenen d'especial els fractals perquè ens pugui interessar el fet de centrar-nos en l'estudi d'aquestes estructures?"

La primera raó és simplement de necessitat. Tal com un pot imaginar, a la vida real els obstacles i les possibles limitacions físiques del medi determinen de manera important els processos de difusió. La descripció "sense obstacles", doncs, es mostra moltes vegades insuficient i no pot oferir una solució satisfactòria. D'altra banda, una estructura espacial completament irregular és intractable des del punt de vista matemàtic, ja que per construir un model és necessari que hi hagi unes regles generals o regularitats que hom pugui traduir després al llenguatge matemàtic. Els fractals són estructures força complexes, però que a la vegada presenten una regularitat important (l'autosimilitud) que fa possible la seva anàlisi matemàtica. Per tant, constitueixen un cas intermedi de gran interès.

Ara bé, aquesta necessitat no pot en cap cas justificar l'ús dels fractals més enllà de la pura especulació matemàtica, si no és que aquestes estructures tenen una aplicació directa en els sistemes naturals. És a dir, ens hauríem de preguntar si en el món que ens envolta és possible trobar alguna estructura semblant a aquests fractals. Arribats a aquest punt, sorgeix la sorpresa i la satisfacció de B. B. Mandelbrot i altres pares de la teoria dels fractals quan van descobrir que existeix una amplíssima varietat d'estructures a la natura que presenten la propietat de l'autosimilitud, per la qual cosa poden considerar-se fractals estadístics. Els exemples són gairebé interminables: els perfils de les costes i de les serralades, les xarxes fluvials i xarxes de comunicacions en general, els sistemes neuronal, respiratori i circulatori, la distribució dels arbres de moltes zones forestals, les ramificacions de les branques i de les arrels dels arbres, els nervis de les fulles, la localització geogràfica dels epicentres de terretremols, la canalització interna dels materials porosos, les cadenes polimèriques... Així, es pot completar una llista tan llarga com variada, la qual cosa ha donat lloc a què es parli, en molts casos, de la ubiqüitat dels fractals a la natura.

A la vista d'aquest descobriment, s'obre una nova manera de contemplar el nostre entorn, no ara com una suma d'estructures desconegudes i plenes d'irregularitats, sinó com un món que amaga a dins seu una in-



La natura sembla que amaga estructures encara més complexes que les fractals (és fractal la que es veu en aquesta imatge). Però encara no en coneixem l'origen ni les propietats.

teressant organització. La natura ens ofereix un laberint que, dins de la seva complexitat i riquesa, és moltes vegades un laberint fractal. És aquesta atraient nova visió de la geometria, i fins i tot del món en general, la que ha fet que molts investigadors s'interessin per aquest camp i que l'estudi de sistemes amb característiques fractals s'hagi convertit en les dues últimes dècades en un dels temes més recurrents en la producció científica.

El dilema de De Gennes i les seves formigues, una vegada sabem tot això, resulta encara més apassionant. Queda, però, la difícil missió d'agafar les regles generals que sorgeixen d'aquesta propietat que és l'autosimilitud i fer encaixar les peces de manera adient. Si s'aconsegueix donar aquest pas, serà possible contestar les preguntes que uns altres van resoldre fa més d'un segle pel cas "sense obstacles".

Una vegada dut a terme l'anàlisi del problema, les conclusions que hem aconseguit

## Stephen Wolfram diu que l'estructura dels ordinadors és més complexa que la fractal

extreure poden resumir-se en l'atractiu resultat que les distàncies que recorren les formigues dins del laberint i els temps emprats en fer aquests camins segueixen relacions força diferents a les que apareixien si es feien servir geometries homogènies. És a dir, la concepció del temps i l'espai dins del fractal queda d'alguna manera trastocada respecte al món "sense obstacles".

Amb l'objectiu d'il·lustrar aquesta idea proposem un petit experiment mental. Imaginem, per exemple, que ara les formigues decideixen organitzar-se i que, en comptes

de moure's a l'atzar, comencen a avançar totes cap endavant en la mateixa direcció (sempre que els obstacles del laberint els ho permetin). En aquest cas, el que observarem serà un fenomen de propagació a través del fractal en comptes de difusió, si bé la idea de fons continua sent la mateixa. En el cas "sense obstacles" o homogeni, el resultat al qual arribaríem és que, si les formigues sempre avancen en la mateixa direcció i triguen un temps determinat a recórrer una distància, la formiga haurà avançat el doble de distància quan el temps sigui el doble.

En el fractal, per contra, no succeeix això; si la formiga avança una certa distància en un temps concret, quan el temps s'hagi doblat, la distància recorreguda serà més petita que el doble. Per tant, en un fractal la distància que es pot avançar decreix amb el temps o, dit d'una altra manera, les formigues es veuen frenades, a un ritme continu i que pot determinar-se amb

exactitud a partir de les propietats del fractal concret que considerem. Això és una conseqüència de dues característiques dels fractals que ja hem esmentat: en primer lloc, a mesura que passa el temps els obstacles que es troben a dins del fractal són cada vegada majors, de manera que costen més de vorejar. En segon lloc, amb el temps augmenta també la probabilitat d'escollir un camí equivocat i d'arribar a un carreró sense sortida, de manera que es perdrà un determinat temps a desfer el camí. La unió d'aquests dos aspectes fa que l'avanç de les formigues sigui cada vegada més lent. A més, és essencial tenir en compte que aquest comportament és independent de quin sigui el punt des del qual les formigues inicien el seu camí. Cap tipus d'estructura basada en una geometria homogènia podria donar lloc a aquestes propietats dinàmiques, de manera que veiem que el cas fractal implica un salt qualitatiu important.

Amb totes aquestes propietats i respostes a les mans, podem enfrontar-nos amb diversos problemes, com ara: com es difon un contaminant abocat al riu a través de la xarxa fluvial?, quant pot trigar una substància injectada en el nostre cos a difondre's i a arribar fins a un punt de l'organisme determinat?, amb quina velocitat es propaga un incendi a través d'un bosc segons quina sigui la distribució a l'espai dels arbres?

La utilitat de la difusió en fractals per casos com aquests pot ser decisiva. Això és el que succeeix en el cas de la relació de Nordin i Sabol, una llei empírica que en hidrologia explica el ritme al qual la concentració d'una substància abocada en un riu decau a mida que aquesta es difon corrent avall. Nosaltres hem comprovat que la difusió homogènia no pot donar una explicació a aquesta relació, però si, en canvi, es consideren les propietats fractals dels rius, el resultat de Nordin i Sabol és perfectament esperable.

Fins i tot en aplicacions socials, un tema com el transport a través de les xarxes de rius pot resultar d'interès. Un bon exemple en són les migracions humanes i biològiques a través de grans territoris, en les quals la contínua necessitat d'aigua fa que els individus es vegin obligats a seguir els marges dels rius per moure's i establir les seves poblacions. En el projecte de tesi, analitzem el cas de la colonització d'Amèrica del Nord d'est a oest al llarg del segle XIX. Gràcies a les dades de l'època que es conserven i als informes



**EL TEMPS**

**V premi  
de periodisme  
d'investigació**

**Ramon Barnils**

**EL SETMANARI EL TEMPS  
CONVOCA EL  
V PREMI DE PERIODISME  
D'INVESTIGACIÓ  
RAMON BARNILS**

La dotació del premi serà de 3.333 euros. Els treballs, inèdits i escrits en català, hauran de presentar-se al setmanari EL TEMPS (Av. Baró de Càrcer, 37, 1er, 1a, 46001 València) abans del 30 de setembre.

L'obra guanyadora serà publicada al setmanari EL TEMPS.

El premi es farà públic durant el sopar de lliurament dels Premis Octubre que tindrà lloc a València el 29 d'octubre de 2005.

Per a més informació:

**EL TEMPS**

Av. Baró de Càrcer, 37, 1er, 1a  
46001 València  
Telf: 963 535 100 • Fax: 963 534 569  
eltemps@eltemps.com  
<http://www.eltemps.net>

dels historiadors que descriuen les rutes dels colonitzadors a través dels rius del país, hem pogut predir amb els models fractals el ritme de colonització del territori i hem comprovat que les prediccions són molt semblants a les dades reals, al contrari del que passa si es considera un model homogeni amb els colonitzadors

interacció de molts d'aquests. Si es vol ser rigorós, s'hauran de tenir en compte les pèrdues del sistema, els efectes estocàstics que fan que el sistema no sempre es comporti igual, etc. D'aquesta manera, la funció d'un model de difusió no és la de resoldre per si mateix tot el problema, sinó més aviat la d'ajudar-nos a determinar algunes

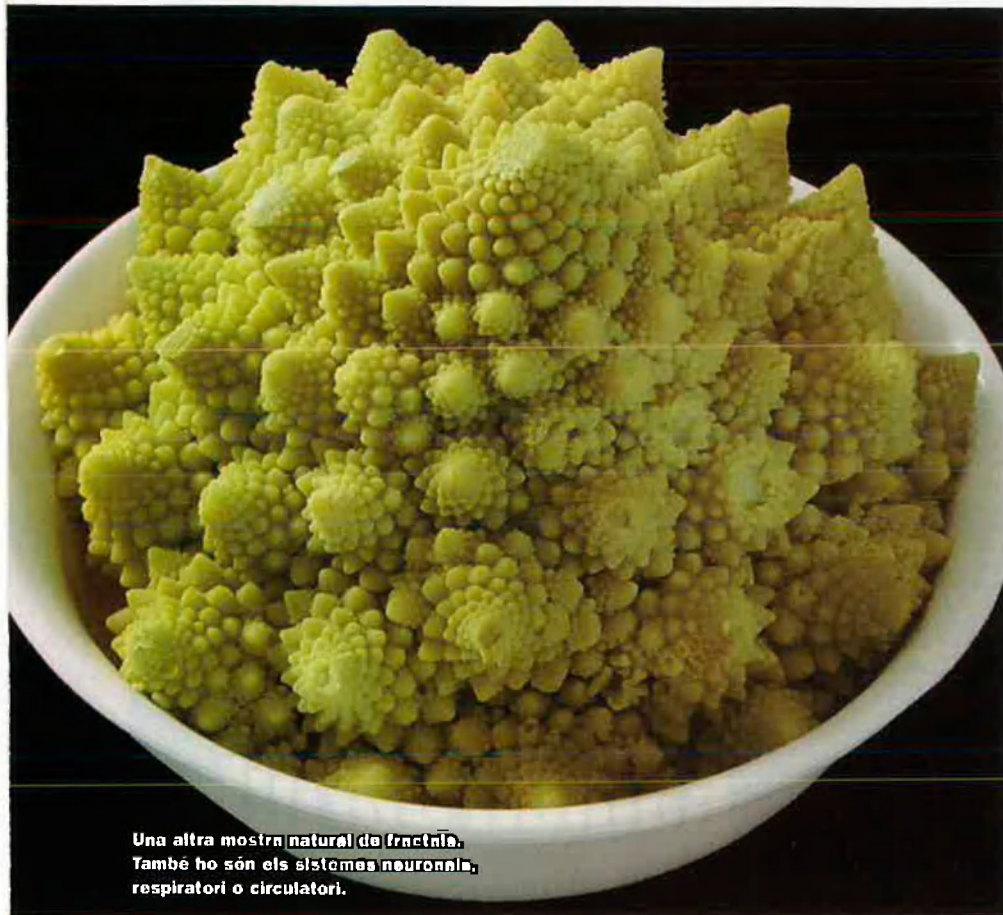
bé els fractals apareixen amb una gran freqüència a la natura, també hi trobem moltes altres estructures encara més complexes i per les quals no se'n coneix encara ni l'origen ni les propietats. Cal fer-nos, doncs, la pregunta de si són els fractals l'última etapa en la concepció matemàtica de la natura, o és possible anar més enllà.

Possiblement, la persona que millor s'ha aproximat al rerefons d'aquesta qüestió és Stephen Wolfram en el seu llibre *A New Kind of Science*, un dels textos científics més famosos i controvertits dels últims temps. En aquest llibre Wolfram sosté que, després de la revolució que ha comportat el desenvolupament dels ordinadors durant la segona meitat del segle passat, disposem ara d'unes eines matemàtiques noves i potents que anys enrere eren impensables. Els seus arguments es basen en l'estudi d'uns models anomenats autòmats cel·lulars. Aquests autòmats cel·lulars no són altra cosa que una llarga cadena de zeros i uns —de manera anàloga als bits d'un ordinador— que evolucionen en el temps d'acord amb una o dues regles senzilles. Amb aquests models tan increïblement simples Wolfram és capaç de construir estructures no només fractals sinó també d'altres amb unes irregularitats i una complexitat encara superiors. Ell defensa la idea que, de la mateixa manera que els ordinadors són capaços avui dia de realitzar les tasques més complicades, aquests models constitueixen una nova manera d'afrontar problemes que poden arribar més enllà del que permeten les matemàtiques conegudes. Fins i tot assenyala que l'aplicació d'aquestes noves eines podria comportar una revolució matemàtica comparable a la introducció del càlcul diferencial per Newton i Leibnitz al segle XVII.

Malgrat que la idea pot semblar pretensiosa i que la teoria és encara incipient, el cert és que el treball de Wolfram demostra que a partir de models i principis relativament senzills es pot arribar a crear estructures d'una complexitat enorme, amb la qual cosa s'ha donat un pas endavant en el camí que ens porta a la descripció de la riquesa de formes que ens ofereix la natura. Si més no, comencem a disposar de les eines necessàries per crear nous laberints cada vegada més complicats; resta ara per veure si serem capaços de sortir-ne.

**Daniel Campos Moreno**  
Departament de Física

(Universitat Autònoma de Barcelona)



Una altra mostra natural de fractals. També ho són els sistemes neuronal, respiratori o circulatori.

### Els fractals també poden servir per estudiar la colonització d'Amèrica del Nord d'est a oest al llarg del segle XIX

movent-se indistintament tot al llarg de tot el territori.

El món real, no obstant això, acostuma a ser força més complicat, i els sistemes, a la pràctica, no funcionen mitjançant un únic procés aïllat, sinó per la superposició i la

propietats essencials de la solució, una solució que en qualsevol cas mai no serà completament exacta. Tal com deia el personatge de Mefistòfeles en el *Faust* de Goethe:

*"Grau, teurer Freund, ist alle Theorie,  
Und grün des Lebens goldner Baum."*  
("Grises, amic meu, són totes les teories,  
i verd, l'arbre daurat de la vida.")

**Què hi ha més enllà?** Aquestes limitacions pròpies del treball científic no fan altra cosa que estimular i augmentar l'interès dels investigadors per continuar endavant i assolir nous horitzons. Així, una vegada hem iniciat aquest viatge amb la intenció de fer front al dilema de De Gennes, el següent pas ens condueix a adonar-nos que, si